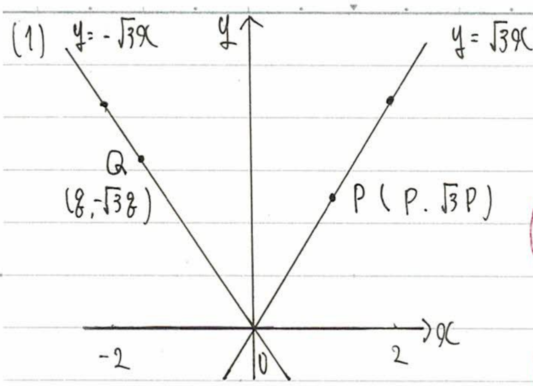
Date

2014年　東大理系数学　第6問　(解の配置)

(1)



$0 \leqq p \leqq 2$
$-2 \leqq q \leqq 0$

上図のように p, q を設定する。

$OP = \sqrt{p^2+(\sqrt{3}p)^2} = 2p$

$OQ = \sqrt{q^2+(-\sqrt{3}q)^2} = -2q$　より

$OP + OQ = 6 \iff 2p - 2q = 6 \iff p - q = 3$

$\iff q = p - 3$

pとqのどちらかに統一するが、正のpの方が良さそう。qを消去

$-2 \leqq q \leqq 0$ に代入して

$-2 \leqq p-3 \leqq 0 \iff 1 \leqq p \leqq 3$

pの定義域

$0 \leqq p \leqq 2$ かつ $1 \leqq p \leqq 3$ なので、$1 \leqq p \leqq 2$

直線PQの方程式は、

$$y = \frac{\sqrt{3}p-(-\sqrt{3}q)}{p-q}(x-p) + \sqrt{3}p$$

(s, t) がこの上にあるので、

$$t = \frac{\sqrt{3}p-(-\sqrt{3}q)}{p-q}(s-p) + \sqrt{3}p \quad \text{—} (※)$$

また、sは線分PQ上なので、$q \leqq s \leqq p$ であり、

$q = p-3$ なので、

$p-3 \leqq s \leqq p \iff s \leqq p \leqq s+3$

そして、仮定より $0 \leqq s \leqq 2$

以上から、

(※)の直線が、$\underbrace{1 \leqq p \leqq 2}_{①}$ かつ $\underbrace{s \leqq p \leqq s+3}_{②}$ かつ $\underbrace{0 \leqq s \leqq 2}_{③}$

の範囲で動き通過する領域を求める。

この後、解法が分岐!!

解の配置で解く

方針：pが①かつ②かつ③において、少なくとも1つ解を持つ条件を求める。

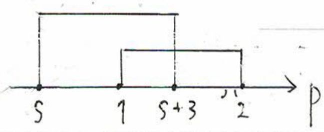
(※)に $q = p-3$ を代入して整理すると、

$$f(p) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}p^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}(s+3)p - \sqrt{3}s - t$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(p - \frac{s+3}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}s^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} - t$$

軸の方程式は、$p = \frac{s+3}{2}$

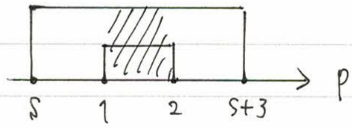
(i) まず①の $1 \leqq p \leqq 2$ と②の $s \leqq p \leqq s+3$ の共通部分を考える。右図の場合は、



$1 \leqq s+3 \leqq 2 \iff -2 \leqq s \leqq -1$ であるが、

③ $0 \leqq s \leqq 2$ との共通部分を考えると解なし。

(ii) 同様に、①かつ②を右図の場合で考える。



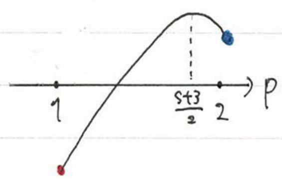
$s \leqq 1$ かつ $2 \leqq s+3$

$\iff -1 \leqq s \leqq 1$ となり、③との共通部分を考えると

$0 \leqq s \leqq 1$　①かつ②かつ③の結論

この時、軸の位置は、$\frac{0+3}{2} \leqq \frac{s+3}{2} \leqq \frac{1+3}{2} \iff \frac{3}{2} \leqq \frac{s+3}{2} \leqq 2$

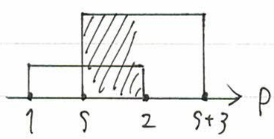
グラフを描くと、



$f(1) \leqq 0$ かつ $f\left(\frac{s+3}{2}\right) \geqq 0$

であればよい。

(iii) 右の場合の①かつ②は、



$1 \leqq s \leqq 2$ であり

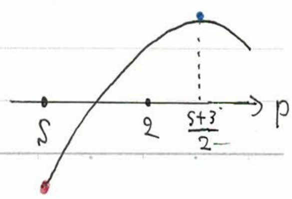
③との共通部分を考えると

$1 \leqq s \leqq 2$　①かつ②かつ③の結論

軸の位置は $\frac{1+3}{2} \leqq \frac{s+3}{2} \leqq \frac{2+3}{2}$

$\iff 2 \leqq \frac{s+3}{2} \leqq \frac{5}{2}$

グラフより



$f(s) \leqq 0$ かつ $f(2) \geqq 0$

であればよい。